Skąd się wzięło słowo ‘matematyka’

Przyrostek grecki *–ikos*, w l.mnogiej *–ika*, wzmacnia słowo zasadnicze, obejmuje jego stosowalnością wyższy, szerszy krąg, wzbogaca je o *całość*, o *wszystko*. W polszczenie przyjęło postać -ika lub –yka, poprzedzone spółgłoską (by lepiej się wymawiało) znajdujemy je w takich słowach jak etyka i polityka, akustyka i fizyka, elektronika i mechatronika, lingwistyka, propedeutyka (z gr. *propaideúein* = uczyć początków jakiejś wiedzy). Znajdujemy ten przyrostek także w słowie *matematyka*, które – wobec greckiego *máthema* = poznanie – znaczy: wszystko o tym, co dające się nauczyć; całość wiedzy o poznaniu; nauka o poznaniu.
Niemal w każdym języku europejskim słowo matematyka brzmi podobnie: *mathematike* po grecku, *mathematica* po łacinie, *mathematics* po szwedzku i angielsku (popularnie skracane do *maths*), (*les*) *mathématiques* po francusku, *matematika* po czesku i słowacku, po węgiersku, litewsku, także w języku słoweńskim i chorwackim, po baskijsku i rosyjsku oraz serbsku (*математика*), *matamaitic* po irlandzku. Wyjątkiem jest tu niderlandzki: *wiskunde* to dosłownie: wiedza pewna, niezawodna. Jako ciekawostkę odnotujmy, że w suahili (Tanzania, Kenia i Uganda) jest tak samo jak po polsku (*matematyka*), a w zulu (wschodnie rejony RPA) to *tibalo*.

Wśród wypowiedzi na temat tego, jak ważną jest matematyka, znajdujemy następujące:

- Liczby rządzą światem. Liczba jest istotą wszystkich rzeczy. (Pitagoras, 527-497 p.n.e.).
- Matematyka jest miarą wszystkiego (Arystoteles, 384-322 p.n.e.).
- Matematyka jest drzwiami i kluczem do nauki (Roger Bacon, 1214-94).
- Matematyka jest światem (Leonardo da Vinci, 1452-1519).
- Matematyka jest alfabetem, przy pomocy którego Bóg opisał świat (Galileusz, 1564-1642)
- Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki (Immanuel Kant, 1724-1804).
- Matematyka jest to królowa wszystkich nauk, jej ulubieńcem jest prawda, a prostość i oczywistość jej strojem (Jędrzej Śniadecki, 1768-1838)
- Matematyka zawiera w sobie nie tylko prawdę, ale i najwyższe piękno-piękno chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby (Bertrand Russell, 1872-1970)
- Temu, kto nie zna matematyki, trudno spostrzec głębokie piękno przyrody (Richard Feynman, 1918-88)
- Bez matematyki, jesteśmy ślepi (Alain Badiou, ur.1937).

Matematyka jest jedną z najstarszych dziedzin wiedzy ludzkiej. Od samego początku zajmowała się figurami geometrycznymi (i przez wieki słowo geometra było tożsame ze słowem matematyk; odnotujmy, że *mathematicus* w dawnej łacinie znaczyło to, co dziś astrolog, a jeszcze Kronecker parających się matematyką zwał geometrami) i liczbami: Arystoteles mówił, że matematyka to nauka o liczbach. Mówi się, że matematyka wyrosła z geometrii, z rozważań nad figurami i liczbami (dziś badania liczb obejmuje teoria liczb).
Z upływem stuleci zajmowała się coraz dalej idącymi uogólnieniami i stawała się coraz silniej nauką wyciągania wniosków – Benjamin Peirce w r.1870 ogłosił: *Mathematics is the science that draws necessary conclusions*. Właśnie pod koniec XIX wieku nastąpiła tzw. aksjomatyzacja matematyki, jej formalizacja. Konieczność tej aksjomatyzacji wymusił sam rozwój matematyki, pogłębiając się natrafiła na paradoksy; paradoksem nazywamy zadanie,

które ma rozwiązania sprzeczne. Przykładowo paradoks Bertranda (opublikowany w 1888 roku) wymusił aksjomatyzację pojęcia ‘prawdopodobieństwo’ (a więc całej tej dziedziny matematyki, którą nazywamy teorią prawdopodobieństwa, i która stanowi punkt wyjścia do statystyki matematycznej).

Mimo że Gödel wykazał, iż nie jest możliwa aksjomatyzacja całej matematyki (mówimy o tym dalej), podejście aksjomatyczne – jako że nie znamy innego bardziej skutecznego – jest powszechnie stosowane, a jego podstawowymi realizacjami jest aksjomatyka geometrii euklidesowej i teoria zbiorów.

Wyniki matematyki, czyli twierdzenia

Wyniki, jakie uzyskuje matematyka, zwane są (rzadziej stwierdzeniami, powszechnie) **twierdzeniami**. Zamiast słowa 'twierdzenie', w zależności od woli jego autora i kontekstu, w jakim występuje, używane bywają słowa jak 'fakt', 'lemat' i 'wniosek'. Twierdzenie jest zdaniem oznajmującym. Twierdzenie najczęściej ma postać implikacji:

jeżeli z, to t,

gdzie litery z i t reprezentują odpowiednio założenie i tezę. Równoważną konstrukcją jest

t, o ile z,

t, gdy z.

Bywa też dość często stosowany zapis

t, gdzie z,

zwłaszcza wtedy, gdy założenie z sprowadza się do oznaczeń.

Przykładowo, twierdzenie Pitagorasa możemy sformułować na przykład w następujące trzy sposoby:

I. Jeżeli a, b oznaczają długości przyprostokątnych dowolnego trójkąta prostokątnego, zaś c – długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, to (zachodzi wzór) $a^2 + b^2 = c^2$.

II. W trójkącie prostokątnym, w którym długości przyprostokątnych są równe a, b, natomiast długość jego przeciwprostokątnej wynosi c, ma miejsce równość $a^2 + b^2 = c^2$.

III. $a^2 + b^2 = c^2$, gdzie a, b oznaczają długości przyprostokątnych dowolnego trójkąta prostokątnego, zaś b – długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Odnotujmy, że sam Pitagoras swe twierdzenie formułował tak:

Suma kwadratów pól zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego kwadratu.

W tym sformułowaniu termin 'kwadrat zbudowany na odcinku' oznacza kwadrat, którego bokiem jest ten odcinek.

Sformułowanie Pitagorasa nazywamy geometrycznym, nie ma w nim jakichkolwiek oznaczeń literowych. Pierwszy znane wielkości (na przykład długości odcinków, liczb) literami oznaczył **Diofantos**. Żył on w Aleksandrii na przełomie III i IV wieku naszej ery, spod jego pióra wyszło 13-tomowe dzieło *Arithmetica* (zachowało się tylko sześć tomów). Rozwiązywał w nim wiele konkretnych równań algebraicznych (i nigdy nie zajmował się kwestią uzyskania wzorów ogólnych), w szczególności w liczbach całkowitych. **Pierre de Fermat** odnotował, w r.1637 na marginesie edycji dzieła Diofantosa wydanej w r.1621, że nie ma rozwiązań całkowitych a, b, c równanie

$$a^n + b^n = c^n,$$

gdy n jest liczbą naturalną większą niż 2. Co więcej, Fermat dopisał: „*Znalazłem zaiste zadziwiający dowód tego twierdzenia. Niestety, margines jest zbyt mały by go pomieścić*" (Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet) i tak rzeczony margines przeszedł do historii jako najsłynniejszy margines świata.

Stwierdzenie zapisane przez Fermata nazwane zostało wielkim twierdzeniem Fermata i przez niemal cztery stulecia pozostawało nieudowodnione. Wykazał je, w roku 1994, **Andrew Wiles** (stosując bardzo zaawansowane metody, w tym topologię i funkcje eliptyczne, na 64 stronach druku formatu A4).

Trochę z historii liczb ujemnych

Diofant(os), uznawany jest za ojca algebry, wprowadził do matematyki nie tylko oznaczenia literowe, ale także znaki równości = i odejmowania – oraz ułamki i liczby ujemne. Wcześniej liczby ujemne pojawiły się w Chinach (traktat *Matematyka w dziewięciu księgach*, *Chiu chang suan shu*, II w. p.n.e). W Indiach występują w liczącej 25 rozdziałów rozprawie *Odsłona wszechświata – Brahmasphutasiddhanta* (rok 628); jej autor, **Brahmagupta**, zestawił w niej tablicę wartości funkcji sinus, podał sposób przybliżania, jakiego uogólnieniem jest formuła Newtona-Stirlinga opracowana w roku 1687 i 1719) i posługiwał się cyfrą 0. Do Europy zawitała ona, wraz z notacją hinduską, dopiero w 1202 roku – w książeczce *Liber abaci*. Złożył ją **Fibonacci**, znany też jako **Leonardo Pisano**, który także przywrócił do istnienia zapomniane na osiem wieków, liczby ujemne ożyły w Europie za sprawą Fibonacciego. W drugim wydaniu tej książeczki, w r.1225, **Fibonacci** rozważając pewne zadanie dotyczące dwóch kupców uzyskał równanie kwadratowe mające tylko jeden pierwiastek dodatni i podjął rozważanie drugiego pierwiastka, ujemnego, jako świadczącego o tym, że jeden z kupców jest dłużnikiem (wcześniej zawsze odrzucano rozwiązanie ujemne jako fałszywe).

Taka interpretacja ujemnego rozwiązania zdobyła sobie prawo istnienia w rozważaniach matematycznych. Wyłożył tę interpretację, na przykład, **Nicolas Chuquet** – w pracy *Triparty en la science des nombres*. Spisana w r. 1488, opublikowana została dopiero w 1870, ale jej fragmenty zamieścił **Estienne de La Roche** w r.1520 w podręczniku *l'Arismetique*; warto tu od razu wspomnieć, że w tym podręczniku stosuje nam znane zapisy potęg i pierwiastków dowolnego stopnia naturalnego.

Po upływie dwóch wieków interpretacja rozwiązania ujemnego przeniknęła do praktyki kupieckiej, gdzie zaczęto stosować znaki + i – na oznaczanie nadwagi i niedowagi, zysku i straty. Znaki te, dotąd związane wyłącznie z dodawaniem i odejmowaniem, zaistniały jako znaki liczb – po raz pierwszy w podręczniku rachunków *Behende und hupsche Rechnung auf allen kauffmanschafft* (autor: **Johannes Widman**, 1489).

Rachunek liczb uporządkował, jako pierwszy na świecie, **Michael Stifel** w pracy *Arithmetica integra* (1544). Choć objął tym rachunkiem także liczby ujemne (definiowane przezeń jako mniejsze niż nic), to uważał je za niemożliwe, nazwał je nawet *liczbami absurdalnymi*.

Jemu współczesny **Geronimo Cardano** (1501-76) nazywał je *liczbami fikcyjnymi*. Mimo tego nie odrzucał istnienia rozwiązań ujemnych równań algebraicznych stopnia 2 i 3. Odnotujmy tu, że Cardano znany jest ze wzorów nazwanych jego imieniem: ogłoszone w książeczce *Ars magna*, w r., wzory Cardano to wzory na pierwiastki równania algebraicznego stopnia 3.

Używane przez Diofanta oznaczenia literowe stały się powszechniej używane dopiero za sprawą Viety (**François Viète**, 1540-1603), gdy literami oznaczył niewiadome. Ten sam Viète zawsze odrzucał rozwiązania ujemne równań.

Głęboko przekonany o tym, iż równania nigdy nie mają rozwiązań ujemnych, był **Thomas Harriot** (1560-1621) – uczony wielkiej klasy:

a) obserwował za pomocą lunety plamy słoneczne wcześniej niż **Galileusz** (**Galileo Gallilei**, 1564-1642),
b) wykonał pierwszą mapę Księżyca korzystając z obserwacji okiem uzbrojonym; pierwszą mapę Księżyca nakreślił **Leonardo da Vinci**, 1452-1519, ale nie dysponował teleskopem – pierwsze teleskopy pojawiły się w Anglii, skonstruował je, ok. 1570, **Leonard Digges**; w Europie kontynentalnej teleskopy rozpowszechnił je dopiero Galileusz, przedstawiając – w roku 1609 – własne ulepszenie przyrządu otrzymanego od nieznanego człowieka,
c) 20 lat wcześniej niż **Snellius**, a więc w 1601 roku, wykrył prawo załamania światła,
d) ustalił, że torem rzuconego ukośnie ciała jest parabola.

Nawet wtedy, gdy liczby ujemne wreszcie zdobyły prawo obywatelstwa w matematyce (i w całym świecie), były traktowane podejrzliwie. Jeszcze **Kartezjusz** (**René Descartes**, 1596-1650), choć zmuszony obiektywizmem uznawał istnienie ujemnych rozwiązań równań wielomianowych, rozwiązania te nazywał *rozwiązaniami fałszywymi*.

Ostatecznie status liczb ujemnych ustalił **Isaac Newton** (1643-1727) – w *Arithmetica universalis* (jest to nieautoryzowany zbiór wykładów Newtona, wygłoszonych w latach 1673-83, spisanych przez nieznanych słuchaczy, opublikowany po raz pierwszy w r.1707 i, w przekładzie na angielski jako *Universal arithmetick*, 13 lat później) znajdujemy jego stwierdzenie:
Quantitades vel affirmative sunt seu majores nihilo, vel negativæ seu nihilo minores (Wielkości bywają bądź dodatnie, czyli większe niż nic, bądź ujemne, czyli mniejsze niż nic; nic znaczy tu 0).

Formalny zapis twierdzeń

Twierdzenia zapisywane są na ogół z użyciem symboli matematycznych. Przykładami symboli są:

a) znaki dodawania i odejmowania (+, –), równości (=), zawierania ($\subset$, $\subseteq$), alternatywy ($\vee$) i implikacji ($\Rightarrow$),
b) kwantyfikatory: wielki, czyli ogólny ($\forall$), oraz mały, czyli szczegółowy ($\exists$),
c) symbole literowe, np. a, b, c (o czym już mówiliśmy wyżej).

W twierdzeniu (mówi się także: w sformułowaniu twierdzenia) występują wyłącznie słowa, których znaczenie już jest znane albo jest właśnie definiowane. Przykładami takich słów są: punkt, prosta, płaszczyzna, odcinek, liczba, liczba parzysta, liczba wymierna.

Pojęcia pierwotne i aksjomaty

W matematyce współczesnej (ale także i starożytnej – na przykład w odniesieniu do geometrii zwanej obecnie euklidesową) przyjmuje się, że pewne pojęcia mają znaczenie same w sobie (a więc nie wymagają definicji) i że mają one pewne własności (których nie trzeba potwierdzać w jakikolwiek sposób, nie trzba ich wykazywać); te pojęcia nazywamy (**obiektami** albo) **pojęciami pierwotnymi**, zaś te własności – **aksjomatami**, **pewnikami**.

W geometrii euklidesowej (tzn. w geometrii, której podstawy, ujęte w system aksjomatyczny, zapisał **Euklides** około 300 r.p.n.e. w dziele *Stoicheia*, tj. *Elementy*; pełny zestaw obiektów pierwotnych i aksjomatów tej geometrii zestawił dopiero Dawid Hilbert – w roku 1889 w dziele *Grundlagen der Geometrie*)

– wśród pojęć pierwotnych znajdują się punkt, prosta, płaszczyzna oraz (relacja:) znajdowanie się punktu między dwoma innymi,
– wśród aksjomatów: aksjomat Archimedesa (dla danych odcinków AB i CD istnieje taka liczba naturalna n, że odkładając n razy odcinek od punktu A na prostej AB uzyskamy odcinek AE, którego punkt końcowy, E, leży poza odcinkiem AB) i piąty postulat Euklidesa (przez punkt nie leżący a prostej przechodzi dokładnie jedna prosta do niej równoległa).

W niniejszym kursie matematyki wśród pojęć pierwotnych znajdują się terminy ‘zbiór’, ‘element zbioru’ i ‘przynależność elementu do zbioru’ oraz ‘liczba naturalna’. Trzy początkowe z nich, mianowicie ‘zbiór’, ‘element zbioru’ i ‘przynależność do zbioru’ (zapisywana z użyciem znaku $\in$, a więc w postaci $a \in A$), są uznawane za pojęcia pierwotne w tzw. teorii zbiorów; z elementami tej teorii spotkamy się nieco dalej.

Matematykę współczesną można zbudować na teorii zbiorów (proces ten zapoczątkował **Georg Cantor**, 1845-1918). W tym podejściu definiuje się, na przykład, czym są liczby naturalne (definiuje się je jako moce odpowiednich zbiorów).

Zbiory liczbowe

W naszym kursie nie wnikamy, co to jest ‘liczba naturalna’, uznajemy to pojęcie za pierwotne, przyjmujemy, że nasza intuicja dostatecznie nam wyjaśnia, co to jest ‘liczba naturalna’. Możemy powiedzieć, że podzielamy w tym względzie zdanie *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* (*Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, inne są dziełem człowieka*), które wypowiedział **Leopold Kronecker** (1823-91). W tym zdaniu uznał, iż ‘liczby naturalne’ istnieją odwiecznie, że liczby naturalne są jakie są, że każdy wie, czuje, co znaczy termin ‘liczba naturalna’, że tego nie trzeba definiować, że ‘liczba naturalna’ jest pojęciem pierwotnym.
Więcej, Kronecker stwierdził w tym zdaniu, że wszystkie inne liczby trzeba definiować, bo pojęcia takie jak ‘liczba wymierna’, ‘liczba rzeczywista’, ‘liczba zespolona’, nie są pierwotnymi.

Wśród zbiorów liczb, z jakimi będziemy mieli do czynienia w kursie, znajdujemy zbiory, które uporządkować można relacją zawierania (istotnego) jak następuje:

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N}_0 \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{O};$$

są tu wymienione kolejno: zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb całkowitych nieujemnych, zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb algebraicznych, zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb zespolonych, zbiór kwaternionów (czyli czwórek Hamiltona), zbiór oktonionów (czyli ósemek Cayleya).

Elementy każdego z tych zbiorów, za wyjątkiem dwóch ostatnich, nazywamy liczbami.

W matematyce wyższej standardowo mówiąc ‘liczba’ rozumiemy, że jest to liczba zespolona; zanim poznamy pojęcie ‘liczba zespolona’ pod pojęciem ‘liczba’ rozumiemy standardowo liczbę rzeczywistą.

Oczywiście, poza wymienionymi zbiorami spotykać będziemy inne zbiory liczbowe, czyli zbiory, których elementami są liczby. Na przykład następujące:

a) zbiór liczb parzystych, czyli liczb całkowitych podzielnych (rozumie się: bez reszty) przez 2, inaczej: zbiór wielokrotności całkowitych liczby 2,
$$\{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$$
b) zbiór liczb pierwszych, czyli liczb naturalnych takich, że każda z nich dzieli się bez reszty jedynie przez swe dzielniki trywialne (tymi są 1 i ona sama); zbiór ten to
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 39, 41, 43, 47, 53, ...\},$$
c) zbiór liczb trójkowych, czyli sum kolejnych liczb naturalnych,
$$\{1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15, ...\}.$$
d) zbiór reszt z dzielenia dowolnej liczby całkowitej nieujemnej przez 12,
$$\{0, 1, 2, 3, ..., 11\}.$$

Założenie, teza, twierdzenia odwrotne i przeciwstawne

Wyniki uzyskiwane przez matematykę nazywane są **twierdzeniami** (w dawniej polszczyźnie używano terminu 'teorema', ang. *theorem*). Twierdzenie jest wypowiedzią (w wysokim stopniu sformalizowaną), którą stosuje się nie tylko w matematyce, ale także we wszystkich naukach ścisłych; naukami ścisłymi (a więc naukami zajmującymi się badaniem otaczającego świata oraz konstruowaniem modeli abstrakcyjnych mogących służyć do tego opisu) są informatyka fizyka, chemia, biologia, geografia fizyczna, astronomia).
Każde twierdzenie składa się z dwóch zbiorów zdań, które łączy relacja implikacji (o implikacji, czyli wynikaniu, mówimy nieco dalej). Zbiory tych zdań nazywa się założeniem i tezą (rozważanego twierdzenia).

Założenie stanowi wykaz warunków, spełnienie których implikuje, iż zachodzi teza (mówimy także ma miejsce teza; teza jest spełniona; teza jest p[prawdziwa]. Mówi się, że zdania składające się na założenie stanowią **przesłanki** (do zaistnienia tezy; do prawdziwości tezy).
Niekiedy założenia nie podaje się explicite, założeniem wtedy jest cała dotychczasowa wiedza matematyczna (w szczególności: zbiór pojęć pierwotnych i aksjomatów). Przykładem takiego twierdzenia jest następujące (twierdzenie trywialne, natychmiast oczywiste):

Liczba naturalna jest liczbą wymierną.

Zapisane w postaci klasycznej, tzn. w postaci implikacji $p \Rightarrow q$, brzmi jak następuje:

Jeśli liczba jest naturalna, to jest (także) wymierna.

Teza stanowi istotną treść wypowiadanego twierdzenia i bywa, że zamiast słowa 'teza twierdzenia' mawia się krótko 'twierdzenie'. Z reguły teza nie wynika bezpośrednio z założeń, wynika ona z założeń pośrednio (a więc udowodnienie tezy wymaga sięgnięcia do innych twierdzeń). W dbale sformułowanym twierdzeniu teza zachodzi dlatego, że są spełnione wszystkie przesłanki, natomiast pominięcie jakiejkolwiek z nich powoduje, że teza nie jest spełniona.
Strukturę zdaniową podobną do twierdzenia ma **sylogizm** (z greckiego *syllogiosos* = konkluzja, wniosek). Od twierdzenia sylogizm różni się tym, że jego zasadność (inaczej: prawdziwość) jest natychmiast widoczna. Pierwszy przykład sylogizmu podał **Arystoteles** (384-322 r.p.n.e. Wypowiedź ta, znana jako sylogizm Arystotelesa, jest następująca:

jeśli każde A jest B i każde B jest C, to każde A jest C.

Jest to wypowiedź oczywiście prawdziwa – na przykład w świecie liczb, tzn. gdy A, B i C oznaczają liczby; używając spójników logicznych zapisuje się ją jak następuje

$$A = B \ \& \ B = C \Rightarrow A = C.$$

Na gruncie logiki matematycznej twierdzenie to pozostaje prawdziwe (stwierdzimy to później) niezależnie od tego, czy przesłanki przedmiotowej tezy (przesłankami tymi są zdania 'każde A jest B" i 'każde B jest C') są prawdziwe czy nie.
Jak odnotujemy później, na gruncie logiki sylogizmy są tautologiami (o których mówi się, że są tautologiami pierwszego rzędu, tzn. oczywistymi). Sylogizm Arystotelesa jest tautologią, którą nazywa się prawem przechodniości implikacji.

Weźmy pod uwagę twierdzenie $p \Rightarrow q$. W omawianym kontekście nazywamy zdanie

$p \Rightarrow q$ **twierdzeniem prostym**,

$q \Rightarrow p$ **twierdzeniem odwrotnym**, albo **przeciwnym**, (do twierdzenia prostego),

$\sim p \Rightarrow \sim q$ **twierdzeniem przeciwstawnym**, **kontrapozycją** (twierdzenia prostego).

Jak zobaczymy później, twierdzenia proste i przeciwstawne są sobie równoważne (a właśnie sformułowana wypowiedź o równoważności tych dwóch zdań nazywa się prawem transpozycji).

W twierdzeniu $p \Rightarrow q$

p nazywamy założeniem twierdzenia, **warunkiem dostatecznym** na to, że (zachodzi) q,

q nazywamy tezą twierdzenia, **warunkiem koniecznym** (tego, że zachodzi p).

Mówimy przy tym, że

jeśli p, to q,
z p wynika q,
p implikuje q,
p pociąga q,
q pod warunkiem, że p.

Twierdzenie wykorzystywane w dowodzie innego twierdzenia (i niejako specjalnie po to sformułowane lub przywoływane) nazywa się często **lematem** (do tego twierdzenia).
Twierdzenie wynikające – na ogół łatwo – z innego twierdzenia nazywa się **wnioskiem**; tak postrzegany wniosek jest sylogizmem.
Twierdzenie oczywiste (a więc takie, które jest już znane lub którego dowód jest – w badanym obszarze – bardzo łatwy) nazywa się **twierdzeniem trywialnym** lub **faktem**.

Dedukcja i dowód bezpośredni

Twierdzenia (w matematyce oraz pozostałych naukach ścisłych) są uzyskiwane (inaczej: otrzymywane, dowodzone, uzasadniane, wyprowadzane) dedukcyjnie, czyli stosując dedukcję. Dedukcję tę obdarza się niekiedy przymiotnikiem ‘matematyczna’ i jest ona bodaj najbardziej istotną cechą matematyki.
Dedukcja (z łac. *deductio* = wyprowadzam), inaczej: **wnioskowanie**, to rozumowanie, w którym z przyjętych założeń i ze znanych już twierdzeń uzyskuje się inne twierdzenia stosując **reguły wnioskowania**, zwane też **schematami dowodzenia**.
Podstawowymi schematami dowodzenia są
a) dowód wprost (czyli bezpośredni),
b) dowód nie wprost,
c) dowód indukcyjny.

Przykładem dowodu bezpośredniego jest udowodnienie twierdzenia

liczba podzielna przez 10 jest parzysta

jak następuje: Niech d oznacza dowolną liczbę podzielną (tzn. liczbę naturalną podzielną bez reszty) przez 10. Znaczy to, że istnieje liczba naturalna m taka, że $d = 10m$. Ponieważ $10 = 2{\cdot}5$, więc $d = (2{\cdot}5){\cdot}m = 5{\cdot}(2m) = 5w$, gdzie $w := 2m$ i, oczywiście, $w \in \boldsymbol{N}$. Na mocy definicji podzielności (przez 5: głosi ona, że każda liczba x podzielna przez 5 daje się zapisać w postaci $x = 5y$, gdzie y $w \in \boldsymbol{N}$) liczba d dzieli się przez 5. cnd.

Dowód nie wprost

Dowodzenie twierdzenia $p \Rightarrow q$ **metodą nie wprost** polega na wykazaniu następującej implikacji

$$p \wedge {\sim}q \Rightarrow 0,$$

tzn. z zaprzeczenia tezy q, przy nadal obowiązującym założeniu p, wynika fałsz. Inaczej mówiąc: zaprzeczenie tezy q implikuje sprzeczność (z założeniem p). Prowadzając dowód nie wprost mówi się, że doprowadza się do sprzeczności – po łacinie (a także we współczesnym języku angielskim) *reductio ad absurdum*. Dowód przeprowadzony metodą nie wprost nazywa się **dowodem nie wprost**, **dowodem apagogicznym**, **dowodem sokratejskim**.
Już w *Elementach* Euklidesa znajdujemy dowód nie wprost. Tak mianowicie dowodzi on następujące twierdzenie (które tu nazwijmy twierdzeniem Euklidesa o liczbie liczb pierwszych): istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.
Oto dowód nie wprost (zapisany przez Euklidesa): Przypuśćmy, że jest liczb pierwszych jest skończenie wiele, powiedzmy, że jest ich n, i oznaczmy je przez $p_1, p_2, ..., p_n$ (naturalnym jest przyjąć $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itd.). Wówczas liczba $p := p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ jest naturalna i żadna z liczb pierwszych $p_1, p_2, ..., p_n$ nie dzieli jej bez reszty. Znaczy to, że p jest liczbą pierwszą. A że nie znajduje się ona w zbiorze $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, więc uzyskaliśmy sprzeczność z naszym przypuszczeniem (brzmi ono: 'liczb pierwszych jest n'). Sprzeczność ta dowodzi (na mocy zasady dowodzenia nie wprost), że twierdzenie Euklidesa o licbie liczb pierwszych jest prawdziwe. cnd.

Dowód indukcyjny

Dowodzenie indukcyjne danego twierdzenia to dowodzenie, w którym stosuje się indukcję zupełną. **Indukcja zupełna** (także: **indukcja enumeracyjna zupełna**, **indukcja wyczerpująca**, **indukcja matematyczna**; ang. *mathematical induction*, fr. *raisonnement par récurrence*, niem. *vollständige Induktion*) to wnioskowanie, w którym przedmiotową tezę uznaje się za prawdziwą poprzez wykazanie, że zachodzi ona we wszystkich możliwych przypadkach. Stosować ją można tylko wtedy, gdy jesteśmy w stanie te wszystkie przypadki sprawdzić, a minimalnym wymogiem tego sprawdzenia jest, by zbiór tych przypadków był przeliczalny (tzn. wszystkie elementy tego zbioru dają się ustawić w ciąg; elementy tego ciągu najczęściej identyfikuje się kolejnymi liczbami naturalnymi).

Standardowe dowodzenie tezy $T(n)$, tzn. że jest prawdziwe zdanie $T(n)$, dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, polega na sprawdzeniu, że zachodzi zdanie $T(1)$, i pokazaniu, że dla dowolnego $n \in \boldsymbol{N}$ prawdziwą jest implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Dla klarowności dalszego wykładu nazwijmy indeks n krokiem dowodowym.

Pierwszy dowód indukcyjny przeprowadził, w pracy *Arithmeticorum libri duo* w roku 1575, **Francesco Maurolico**, gdy wykazał, że suma n początkowych liczb nieparzystych jest równa n^2.

Dla przykładu wykażemy, stosując metodę indukcji zupełnej, zdanie, że dla każdego naturalnego n jest prawdziwe zdanie $T(n)$ brzmiące następująco: suma s_n kwadratów kolejnych liczb naturalnych do n-tej włącznie jest równa

$$w_n := \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Używając właśnie wprowadzonych oznaczeń widzimy, że dowodzone twierdzenie to wypowiedź

$T(n)$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$, gdzie $T(n)$ oznacza $s_n = w_n$.

Dla $n = 1$ mamy $s_1 = 1^2 = 1$, $w_1 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$,

a więc $s_1 = w_1$, a to znaczy, że zdanie $T(1)$ jest prawdziwe.

Zakładamy teraz, że dla dowolnego $n \in \boldsymbol{N}$ zachodzi zdanie $T(n)$, tzn. że $s_n = w_n$. Założenie to nazywamy założeniem indukcyjnym i z tego założenia wywioskujemy, że prawdziwe jest zdanie dla następnej wartości kroku dowodowego, tzn. że jest prawdziwe zadanie $T(n+1)$, tzn. że $s_{n+1} = w_{n+1}$. Ponieważ $s_{n+1} = s_n + (n+1)^2$, więc (wobec założenia $s_n = w_n$.)

$$s_{n+1} = w_n + (n+1)^2,$$

czyli (na mocy znaczenia napisu w_n)

$$s_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Wyłączamy $(n+1)$ i zauważamy, że

$$\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) = \frac{(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)}{6} = \frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)}{6}.$$

Zauważamy, że otrzymane właśnie wyrażenie jest równe w_{n+1} i dlatego

$$s_{n+1} = w_{n+1},$$

a ta równość stanowi tezę indukcyjną $T(n+1)$.

Na mocy zasady indukcji zupełnej jest prawdą $T(n)$ dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$. cnd.

Omawiając indukcję zupełną trzeba odnotować:

a) (niejako wbrew swej nazwie) indukcja zupełna jest w istocie rozumowaniem dedukcyjnym (**indukcją logiczną** nazywa się metoda tworzenia uogólnień teorii na podstawie doświadczeń i obserwacji zdarzeń; jest więc indukcja logiczna rozumowaniem od szczegółu do ogółu, podczas gdy indukcja matematyczna wjest wnioskowaniem innym: od ogółu do szczegółu),
b) zasadność dowodzenia metodą indukcji zupełnej jest, we współczesnej matematyce (a dokładniej: w arytmetyce), przyjmowana jako aksjomat; pewnik ten zwie się **aksjomatem indukcji zupełnej** i wchodzi w skład aksjomatów, jakie przedstawił **Giuseppe Peano** (1858-1932).

Konieczność takiego podejścia wynikła z rozważań, jakie przeprowadził **Kurt Gödel** (1906-78). Gödel jest najbardziej znany z twierdzenia o niezupełności (*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, 1931); mówi ono, iż w aksjomatycznej teorii matematycznej zawierającej pojęcie liczb naturalnych można zawsze sformułować zdanie, którego w ramach tej teorii nie da się ani udowodnić, ani obalić. Wynik ten definitywnie zakończył próby aksjomatycznego ujęcia całej matematyki. Z twierdzenia Gödla wynika, że jest to zadanie niewykonalne. Wynika też, że matematyka nie jest i nigdy nie będzie nauką zamkniętą, zakończoną.

Ze zbioru *Humor* (Marcin Owczarczuk, 2004)
Metody dowodzenia twierdzeń:

- dowód przez ogląd (łatwo widać),
- dowód przez połechtanie ambicji słuchaczy (to dla Państwa jest proste),
- dowód iluzjonistyczny (zrobimy teraz taką małą sztuczkę),
- dowód spychologiczny (Państwo sprawdzą sami),
- dowód przez kalendarz (to było w zeszłym roku),
- dowód przez zastraszenie (albo Państwo uwierzą na słowo, albo będę przez trzy
- godziny dowodził),
- dowód przez sztućce (a nuż wyjdzie),
- dowód teologiczny (diabli wiedzą jak to udowodnić),
- dowód przez założenie tezy,
- dowód cybernetyczny (automatycznie wynika, że...)

Logika matematyczna

Reguły wnioskowania te bada ten dział matematyki, który nazywa się logiką matematyczną. Nazwa tej dziedziny nauki, logika, wywodzi się z greckiego *logikos* (z akcentowaną ostatnią sylabą), co znaczy zgodny z rozumowaniem, i bezpośrednio nawiązuje do słowa *logos* = słowo.
Określenie **logika matematyczna** ma dwa znaczenia:

- nauka o ogólnych prawach poprawnego wnioskowania,
- system dedukcyjny opisujący to wnioskowanie.

Wyróżnia się logikę klasyczną oraz logiki nieklasyczne, zwane też logikami wielowartościowymi.

Przykładem logiki wielowartościowej jest logika trójwartościowa – opracował ją Jan Łukaszewicz (1858-1956). Logiki wielowartościowe w praktyce stosowane są rzadko, nigdy na gruncie matematyki standardowej, i nie stanowią przedmiotu naszego zainteresowania.

Logika (**klasyczna**) rozważa jedynie zdania prawdziwe i fałszywe, a więc wartościowuje każdą wypowiedź jako prawdziwą lub jako fałszywą, stosując tzw. **rachunek zdań**.

Zdania (**logiczne**) buduje się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych.

Zmienne logiczne są to wielkości, które nie mogą przyjmować jakiejkolwiek innej wartości poza jedną z następujących dwóch: fałsz oraz prawda. Powszechnie oznacza się je przez 0 (fałsz, nieprawda) 1 (prawda).

Wyróżnia się pięć podstawowych **operacji logicznych**. Oznaczane są one znakami $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\sim$. Cztery pierwsze z tych operacji logicznych są operacjami dwuargumentowymi. Nazywamy je kolejno alternatywą (inaczej: sumą logiczną), koniunkcją (inaczej: iloczynem logicznym), implikacją (inaczej: wynikaniem) i równoważnością. Operacje te określamy także mianem ‘spójniki logiczne’. Ostatnia z tych operacji, oznaczana przez ~ (albo przez ’), jest jednoargumentowa i nazywa się negacją. Tabele określające wartości spójników logicznych i negacji mają postać, jaką nadał im **Charles Anders Peirce** (1839-1914).

Tabelki wartości podstawowych operacji logicznych						
		alternatywa	koniunkcja	implikacja, wynikanie	równo-ważność	negacja, zaprzeczenie
p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim q$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	

Zdanie, które ma wartość prawda dla każdego zestawu wartości zmiennych logicznych wchodzących w to zdanie, nazywa się **tautologią** albo **prawem rachunku zdań**. Współczesną postać klasycznemu rachunkowi zdań nadał **Friedrich Ludwig Gollob Frege** (1848-1925).

Zestaw częściej używanych praw rachunku zdać podaje tabela.

nr	nazwa prawa: prawo	
1	tożsamości	$p \Rightarrow p$
2	pozbywania implikacji	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
3	pozbywania równoważności	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \{ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\}$
4	podwójnego przeczenia	$p \Leftrightarrow \sim\sim p$
5	przemienności alternatywy	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
6	przemienności koniunkcji	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
7	łączności alternatywy	$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
8	łączności koniunkcji	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
9	idempotentności alternatywy	$p \Leftrightarrow (p \vee p)$
10	idempotentności koniunkcji	$p \Leftrightarrow (p \wedge p)$
11	rozdzielności alternatywy wzgl.koniunkcji	$\{(p \vee (q \wedge r)\} \Leftrightarrow \{(p \vee r) \wedge (p \vee r)\}$
12	rozdzielności koniunkcji wzgl. alternatywy	$\{(p \wedge (q \vee r)\} \Leftrightarrow \{(p \wedge r) \vee (p \wedge r)\}$
13	wyłączonego środka, tertium non datur	$p \vee \sim p$
14	sprzeczności	$\sim(p \wedge \sim p)$
15	pochłaniania dla alternatywy	$p \Rightarrow (p \vee q)$
16	pochłaniania dla koniunkcji	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
17	zaprzeczenia alternatywy (1. prawo de Morgana)	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
18	zaprzeczenia koniunkcji (2. prawo de Morgana)	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
19	zaprzeczenia implikacji	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
20	Claviusa	$(\sim p \Rightarrow p)) \Rightarrow p$
21	Dunsa Szkota (z fałszu zawsze wynika prawda)	$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
22	symplifikacji (z każdego zdania wynika prawda)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
23	przechodniości implikacji	$\{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\} \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
24	transpozycji	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
25	modus tollendo tollens (zaprzeczam *p* zaprzeczając *q*)	$\{(p \Rightarrow q) \wedge \sim q\} \Rightarrow \sim p$
26	modus tollendo ponens (potwierdzam *q* zaprzeczając *p*)	$\{(p \vee q) \wedge \sim p\} \Rightarrow q$
27	modus ponendo tollens (zaprzeczam *q* potwierdzając *p*)	$\{(\sim p \vee \sim q) \wedge p\} \Rightarrow \sim q$
28	modus ponendo ponens (potwierdzam *q* potwierdzając *p*)	$\{(p \Rightarrow q) \wedge p\} \Rightarrow q$
29	redukcji do sprzeczności, reductio ad absurdum	$\{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)\} \Rightarrow \sim p$
30	Fregego	$\{(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\} \Rightarrow \{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$

Prawa 25-28 zwane są **prawami Arystotelesa** (Arystoteles, 384-322 r.p.n.e.), stanowią bowiem formalny zapis reguł, jakie stosował ten wielki uczony, z racji miejsca swego urodzenia nazywany Stagiritą. Tautologia 28 nazywana jest krótko ‘modus ponens’ oraz **regułą odrywania**.

Działy matematyki

Matematykę można podzielić na dwa wzajemnie przenikające się obszary:

- matematykę czystą,
- matematykę stosowaną.

Matematyka czysta to studium związków zachodzących między abstrakcyjnymi wielkościami przeprowadzane za pomocą przyjętych reguł (regułami tymi są, jak wiemy, prawa rachunku zdań). Obejmuje ona różne działy, wśród których znajdują się:

- arytmetyka (czyli teoria liczb naturalnych) i wyrosła z niej teoria liczb; Carl Friedrich Gauss (1777-1855), zwany księciem matematyków, powiedział: *Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik* (*Matematyka jest królową nauk, a teoria liczb jest królową matematyki*),
- algebra (w tym algebra abstrakcyjna, a więc teoria grup, przestrzenie Hilberta itd.),
- geometria,
- rachunek różniczkowy i całkowy,
- topologia, czyli studium własności geometrycznych figur, które pozostają niezmienne przy dokonywaniu transformacji ciągłych (zwanych homeomorfizmami),
- teoria zbiorów, na gruncie której w końcu wieku XIX podjęto aksjomatyzację całej matematyki.

Do **matematyki stosowanej** zalicza się takie działy matematyki jak

- rachunek prawdopodobieństwa i statystyka,
- metody numeryczne,
- mechanika klasyczna,
- mechanika kwantowa,
- teoria względności.

Rozumiana potocznie matematyka to **matematyka użytkowa**, czyli stosowana w tzw. życiu codziennym, a więc przed wszystkim umiejętność wykonywania działań arytmetycznych (+, –, ·, /) i obliczania pól obszarów, objętości brył itp. Początki matematyki użytkowej sięgają Babilonii (około 2000 lat p.n.e.). W świecie techniki (a więc dla studentów i absolwentów politechnik) matematyka użytkowa to matematyka, która jest niezbędna, by opisać istniejące oraz planowane przedsięwzięć inżynierskich (np. wyznaczenie naprężeń w belce, napięć na zaciskach obwodów elektrycznych), by materię tak przekształcać, aby finalny produkt realizował to, co zamierzone (np. most wytrzymywał obciążenie, naciśnięcie przycisku owocowało efektem oczekiwanym, a nie dowolnym).

Początki **matematyki naukowej**, czyli opartej na rozumowaniu logicznym (a nie magicznym), znajdujemy w Grecji około roku 500 p.n.e., w szczególności w 13-tomowym dziele *Stoicheia geometria* (Elementy geometrii), której autorem jest Euklides (ok. 365-300 r.p.n.e.). To on, odpowiadając na zarzuty jednego z władców, iż tak trudno jest nauczyć się matematyki, odrzekł: μή εἶναι βασιλικήν ἀτραπόν ἐπί γεωμετρίαν (*Nie ma królewskiej drogi do (poznania) matematyki*; łac. *Non est regia ad Geometriam via*). Aksjomatyzację całości matematyki, a więc sformułowanie jej w postaci systemu dedukcyjnego, podjęto w końcu wieku XIX..

Trudno odpowiedzieć na pytanie: *co to jest matematyka*. Nie dają ścisłej odpowiedzi na nie także R.Courant i H.Robbins w nazwanej tym pytaniem książce (pierwsze wydanie w r.1941), wskazują, że istotnymi elementami matematyki są logika i intuicja, analiza i konstrukcja, uogólnianie i indywidualizowanie. Matematykę można określić (nawiązując do jej rozwoju historycznym) jako *naukę o liczbach ogólnych formach przestrzennych i o stosunkach ilościowych*. Za Poincaré można powiedzieć, że jest ona *sztuką nadawania takich samych nazw różnym rzeczom* (*La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes* w książce *Science et méthode*, 1908) i na miejscu jest tu przywoływanie relacji równoważności (abstrahuje ona od cech nieistotnych w danym momencie rozważań). Michał Gromow, laureat Nagrody Abla 2009, powiedział, że matematyka jest sztuką znajdowania wzorców (*Les mathématiques sont l'art de retrouver des archetypes*).

Adam Marlewski, 2014-10-07

Reguła ogólna:

Milcz albo mów rzeczy lepsze od milczenia. (Pitagoras, 570-495)

Cytaty o matematyce i matematykach:

Matematyka jest miarą wszystkiego. (Arystoteles, 384-322)

Do matematyki nie ma królewskiej drogi. (Euklides, 365-300)

Matematyka jest drzwiami i kluczem do nauki. Aby zyskać pewność bez wątpliwości i czystą prawdę, trzeba oprzeć nasze dociekanie na matematyce. (Roger Bacon, 1214-94)

Simplicibus itaque verbis gaudet Mathematica Veritas, cum etiam per se simplex sit Veritatis opatio (Prawda matematyczna lubuje słowa proste, jako że takie są język prawdy jest prosty sam w sobie) (Tycho Brahe, 1546-1601)

Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat. Księga świata jest napisana w języku matematyki. (Galileusz,1564-1642)

Prawa natury to nic więcej niż matematyczne przemyślenia Boga. (Johannes Kupler, 1571-1630).

Matematyka jest nauką o porządku i mierzeniu, o pięknych ciągach rozumowań, przejrzystą i łatwą. (Kartezjusz, 1596-1650)

Aby zyskać korzyść z poznania, jakie daje zrozumienie zjawisk, absolutnie niezbędną jest matematyka. (Daniel Bernoulli, 1700-82)

Rachunek algebraiczny jest pewniejszy niż nasz osąd (Leonard Euler, 1707-83)

Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki. (Immanuel Kant, 1724-1804)

Matematyka jest królową wszystkich nauk, jej ulubieńcem jest prawda, a prostość i oczywistość jej strojem; ale przybytek tej Monarchini jest obsadzony cierniem, po którym przechodzić trzeba; nie ma on powabu, tylko dla umysłów, zamiłowanych w prawdzie i lubiących walczyć z trudnościami. (Jan Śniadecki, 1756-1830)

Nie ma takiego działu matematyki, choćby najbardziej abstrakcyjnej, który pewnego dnia nie znalazłby zastosowania w opisie rzeczywistego świata. (Mikołaj Łobaczewski, 1792-1856)

Dobry Bóg stworzył liczby naturalne; inne są dziełem człowieka. (Leopold Kronecker, 1823-91)

Istota matematyki zawiera się w jej wolności. (Georg Cantor, 1845-1918)

W nauce jest tyle wiedzy, ile w matematyce. (Henri Poincaré, 1854-1912)

Boga nie obchodzą nasze problemy matematyczne. On całkuje empirycznie. (Albert Einstein, 1879-1955)

Nie do wiary, że matematyka, będąca tworem myśli ludzkiej, potrafi opisać precyzyjnie świat . (Albert Einstein, 1879-1955)

Dlaczego ludzie uczą się matematyki? Aby nauczać matematyki innych. (Hugo Steinhaus, 1887-1972).

Kraj bez matematyki nie wytrzyma współzawodnictwa z tymi, którzy uprawiają matematykę. (Hugo Steinhaus, 1887-1972)

Nie zgadzam się z matematyką. Uważam, że suma zer daje groźną liczbę. (Stanisław Jerzy Lec, 1909-66)